

# Análisis Funcional

## Examen XVI

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Funcional

## Examen XVI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

David Sánchez Muñoz

Granada, 2025/26

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2025/26.

**Grado** Grado en Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** David Arcoya Álvarez.

**Descripción** Examen final extraordinario.

**Fecha** 12 de febrero del 2026.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Sea  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{n \geq 1} x_n y_n \text{ converge para todo } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Prueba que  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  y  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  dos espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  lineal y acotada para la que existe  $c > 0$  tal que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Prueba que  $T$  es compacto si y solo si  $\dim X < \infty$ .

**Ejercicio 3** (4 puntos). Sean  $E = \ell^p$  y  $F = \ell^q$  con  $p, q \in ]1, \infty[$ . Suponiendo que  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua verificando

$$|a(t)| \leq C|t|^{p/q}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

se define la aplicación  $A : \ell^p \rightarrow \ell^q$  mediante

$$Ax = \{a(x(k))\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \text{para cada } x = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p.$$

- a) [1.5 puntos] Prueba que  $A$  está bien definida y es continua de  $\ell^p$  (con la topología de la norma) en  $\ell^q$  (con la topología de la norma).
- b) [1.5 puntos] Demuestra que si  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\ell^p$  que converge  $(\sigma(E, E^*))$  débilmente a  $x \in \ell^p$ , entonces  $\{A(x^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $(\sigma(F, F^*))$  débilmente a  $Ax \in \ell^q$ .
- c) [1 punto] Deduce que la restricción de  $A$  a la bola unidad cerrada  $\overline{B}_E$  es continua de  $(\overline{B}_E, \sigma(E, E^*))$  en  $(F, \sigma(F, F^*))$ .